

数学(理科)

本试卷共 4 页, 全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟。

考生注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

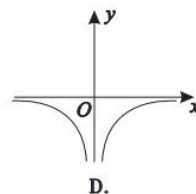
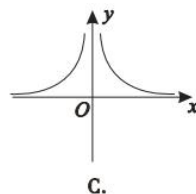
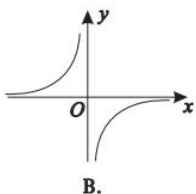
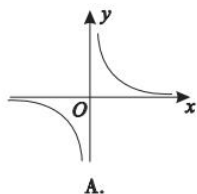
1. 已知集合 $A = \{x|y^2 = 2x - 4, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x|x^2 - 2x < 15\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(-3, 2]$ B. $[2, 5)$ C. $(-5, 2]$ D. $[2, 3)$

2. 若两条直线 a, b 分别在两个不同的平面 α, β 内, 则“直线 a, b 不相交”是“ $\alpha // \beta$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$ 的图象大致为

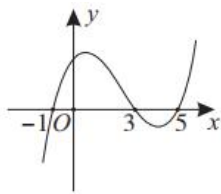


4. 在平面直角坐标系中, 点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, 类比

可得在空间直角坐标系中, 点 $(2, 3, 4)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 4 = 0$ 的距离为

- A. 4 B. 5 C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{20}{3}$

5. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论正确的是



- A. $f(-1)=f(3)$ B. $f(-1)<f(3)$ C. $f(3)<f(5)$ D. $f(-1)>f(5)$

6. 某城镇为改善当地生态环境，2016 年初投入资金 120 万元，以后每年投入资金比上一年增加 10 万元，从 2020 年初开始每年投入资金比上一年增加 10%，到 2025 年底该城镇生态环境建设共投资大约为

- A. 1600 万元 B. 1660 万元 C. 1700 万元 D. 1810 万元

7. 由曲线 $y = \frac{1}{x-1}$ 与直线 $y = x-1$ 及 $y = 3$ 所围成的封闭图形的面积为

- A. $2 - \ln 3$ B. $2 + \ln 3$ C. $4 - \ln 3$ D. $4 + \ln 3$

8. 已知将向量 $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 绕起点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到向量 $\mathbf{b}$ ，则 $\mathbf{b} =$

- A. $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$ B. $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$

- C. $(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4})$ D. $(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4})$

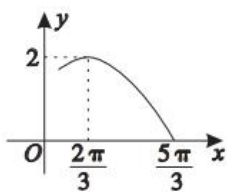
9. 已知实数 a, b 满足 $\ln a + \ln b = \ln(a+b+3)$ ，则 $a+b$ 的最小值为

- A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{5}$ D. 6

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足： $S_m < S_{m+2} < S_{m+1}$ ，若 $S_n > 0$ ，则 n 的最大值为

- A. $2m$ B. $2m+1$ C. $2m+2$ D. $2m+3$

11. 函数 $f(x) = A[\sin(\omega x + \theta) + \cos(\omega x + \theta)]$ 部分图象如图所示，当 $x \in [-\pi, 2\pi]$ 时， $f(x)$ 最小值为



- A. -1 B. -2 C. -2 D. -3

12. 已知关于 x 的方程 $x - \ln a = 2\ln|x|$ 有三个不等的实数根，则实数 a 的取值范围是

- A. $(\frac{1}{2}e, +\infty)$ B. $(\frac{e^2}{4}, +\infty)$ C. $(e, +\infty)$ D. $(e^2, +\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 3$ ，则 $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha =$ _____。

14. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ x - y \leq 2 \\ x - 4y + 4 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x - 2y$ 的最大值为_____。

15. 中国茶文化博大精深，茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关。经研究可知：在室温 25°C 下，某种绿茶用 85°C 的水泡制，经过 x min 后茶水的温度为 $y^\circ\text{C}$ ，且 $y = k \times 0.9085^x + 25$ ($x \geq 0, k \in \mathbb{R}$)。当茶水温度降至 55°C 时饮用口感最佳，此时茶水泡制时间大约为_____min (结果保留整数)。(参考数据： $\ln 2 \approx 0.6931, \ln 3 \approx 1.0986, \ln 0.9085 \approx -0.0960$)

11. 已知等边三角形 ABC 的边长为 6，点 P 满足 $3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ ，则 $|\overrightarrow{PA}| =$ _____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = 2a_n - n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

(1) 求证：数列 $\{a_n + 2n + 3\}$ 是等比数列；

(2) 求 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$ 。

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{3} AC$ ， AD 为边 BC 上的中线，记 $\angle CAD = 2\angle BAD = 2\alpha$ 。

(1) 求证： $\triangle ABC$ 为直角三角形；

(2) 若 $AD = 1$ ，延长 BC 到点 E ，使得 $AE = \sqrt{13} CE$ ，求 $\triangle ABE$ 的面积。

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3(a^2 - a + 2)x^2 + 12(a^2 - a)x + 1$ ， $a \in \mathbb{R}$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性。

20. (12 分)

已知在扇形 OPQ 中，半径 $OP = 1$ ，圆心角 $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$ 。从该扇形中截取一个矩形 $ABCD$ ，

有以下两种方案：方案一：(如图 1) C 是扇形弧上的动点，记 $\angle COP = \alpha$ ，矩形 $ABCD$ 内接于

扇形；方案二：(如图 2) M 是扇形弧的中点， A, B 分别是弧 PM 和 MQ 上的点，记 $\angle AOM =$

$\angle BOM = \beta$ ，矩形 $ABCD$ 内接于扇形。要使截取的矩形面积最大，应选取哪种方案？并求出

矩形的最大面积。

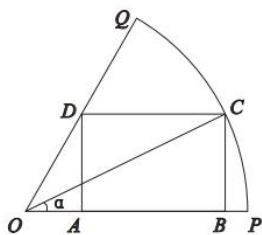


图 (1)

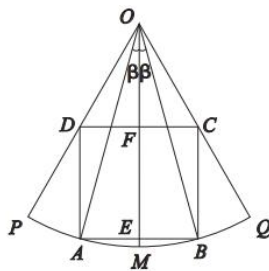


图 (2)

21.(12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = \frac{ax}{x+1}$, 若 $F(x) = f(x) - g(x)$ 最小值为 0。

(1) 求实数 a 的值;

(2) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $g(1) + g(2) + \cdots + g(n) + f(n) > n$ 。

22.(12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+n)$ ($n \in \mathbb{R}$)。

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = x$ 相切, 求 n 的值;

(2) 若存在 $x_0 \geq 0$, 使 $f(x_0) > e^{2x_0} - x_0^2$ 成立, 求实数 n 的取值范围。

理数参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	A	A	B	D	C	C	D	C	D	B

集合与简易逻辑, 函数, 导数及其应用, 三角, 向量, 数列, 不等式, 推理与证明 (不等式以后占比较少);

1. 【解析】 $A = \{x | y^2 = 2x - 4\} = [2, +\infty)$, $B = \{x | x^2 - 2x < 15\} = (-3, 5)$, 所以 $A \cap B = [2, 5)$.

2. 【解析】由直线 a, b 不相交不能推出 $\alpha // \beta$; 由 $\alpha // \beta$, 可推出直线 a, b 不相交, 故选 B.

3. 【解析】由 $f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} - 1} = \frac{e^x}{1 - e^{2x}} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, $f(1) = \frac{e}{e^2 - 1} > 0$, 故选 A.

4. 【解析】类比可得, 点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,

故 $d = 4$, 所以选 A.

5. 【解析】由图可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(3, 5)$ 上递减, 在 $(-1, 3), (5, +\infty)$ 上递增, 故 $f(-1) < f(3)$.

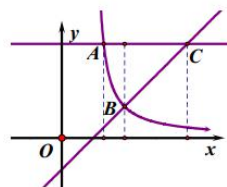
6. 【解析】设 2016 年到 2025 年每年投入资金分别为 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, \dots, b_6$, 由已知 a_1, a_2, a_3, a_4 为等差数列, $a_1 = 120, a_4 = 150$, 其和为 $S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 540$. $b_1, b_2, \dots, b_6$ 为等比数列, $b_1 = 150 \times 1.1$,

公比 $q = 1.1$, 其和为 $S_2 = b_1 + b_2 + \dots + b_6 = \frac{150 \times 1.1(1 - 1.1^6)}{1 - 1.1} = 1650(1.1^6 - 1)$, 又

$1.1^6 \approx 1 + C_6^1 0.1 + C_6^2 0.1^2 + C_6^3 0.1^3 \approx 1.77$, $S_2 \approx 1270$. 共投入资金大约为 1810 万元, 故选 D.

7. 【解析】封闭图形如图, 计算得 $A\left(\frac{4}{3}, 3\right)$, $B(2, 1)$, $C(3, 3)$

$$S = \frac{2}{3} \times 3 - \int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4 - \ln 3, \text{ 故选 C.}$$



8. 【解析】由已知得 $a = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$,

故 $b = \left(\cos \frac{7\pi}{12}, \sin \frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, 故选 C.

9. 【解析】由已知得 $ab = a + b + 3$, 即 $(a-1)(b-1) = 4$,

$a+b=(a-1)+(b-1)+2 \geq 2\sqrt{(a-1)(b-1)}+2=6$ ，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号，故选 D.

10. 【解析】由 $S_m < S_{m+2} < S_{m+1}$ 得， $a_{m+1} > 0$ ， $a_{m+2} < 0$ ， $a_{m+1} + a_{m+2} > 0$.

$$\text{又 } S_{2m+1} = \frac{(2m+1)(a_1 + a_{2m+1})}{2} = (2m+1)a_{m+1} > 0,$$

$$S_{2m+3} = \frac{(2m+3)(a_1 + a_{2m+3})}{2} = (2m+3)a_{m+2} < 0,$$

$$S_{2m+2} = \frac{(2m+2)(a_1 + a_{2m+2})}{2} = (m+1)(a_{m+1} + a_{m+2}) > 0, \text{ 故选 C.}$$

11. 【解析】由已知 $f(x) = \sqrt{2}A \sin\left(\omega x + \theta + \frac{\pi}{4}\right)$ ，由图像可知取 $A = \sqrt{2}$ ，周期 $T = 4\pi$ ，所以 $\omega = \frac{1}{2}$ ，

$$\text{由 } f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0, \text{ 及图像单调性知，取 } \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}, \quad f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$x \in [-\pi, 2\pi], \quad \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right], \quad f(x) \text{ 最小值为 } 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \text{ 故选 D.}$$

12. 【解析】转为直线 $y = x - \ln a$ 与函数 $y = 2 \ln|x|$ 有三个交点. 显然当 $x < 0$ 时，有一个交点；当

$x > 0$ 时，只需 $y = x - \ln a$ 与 $y = 2 \ln x$ 有两个交点即可. 由 $y' = \frac{2}{x} = 1$ ，得 $x = 2$. $y = x - \ln a$ 与

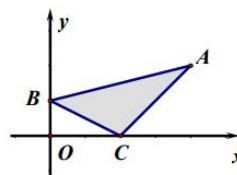
$y = 2 \ln x$ 相切时，切点坐标为 $(2, 2 \ln 2)$ ，此时 $a = \frac{e^2}{4}$. 当 $a \in \left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$ 时， $y = x - \ln a$ 与 $y = 2 \ln x$

有两个交点，故选 B.

13. 【答案】1 【解析】由已知得 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 3$ ，解得 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. 所以 $\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha = \frac{\tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = 1$.

14. 【答案】2 【解析】满足 $\begin{cases} x+2y \geq 2 \\ x-y \leq 2 \\ x-4y+4 \geq 0 \end{cases}$ 的可行域为 $\triangle ABC$ 及其内部，

其中 $A(4, 2), B(0, 1), C(2, 0)$ ，且 C 点为最优解， $z_{\max} = 2$.



15. 【答案】7 【解析】由题意可知，当 $x=0$ 时 $y=85$ ，即

$$85 = k + 25, \quad k = 60, \quad \text{故 } y = 60 \times 0.9085^x + 25. \quad \text{当 } y = 55 \text{ 时得：} 55 = 60 \times 0.9085^x + 25,$$

$$x = \log_{0.9085} 0.5 = \frac{-\ln 2}{\ln 0.9085} \approx \frac{0.6931}{0.0960} \approx 7.$$

16. 【答案】 $\sqrt{7}$ 【解析】 $6\overrightarrow{AP} = 2(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) + (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}) = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AP}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)^2 = 7, \quad \text{故 } |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{7}.$$

17. 【解析】 (1) 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - (n-1)^2$, 又 $a_n = S_n - S_{n-1}$

所以 $a_n = 2a_{n-1} - 2n + 1$, 故 $a_n = 2a_{n-1} + 2n - 1$ 2 分

所以 $a_n + 2n + 3 = 2a_{n-1} + 4n + 2 = 2(a_{n-1} + 2n + 1)$ 4 分

又当 $n=1$ 时, $2S_1 = 3a_1 + 1$, $S_1 = a_1$, 故 $S_1 = a_1 = 1$, 所以 $a_1 + 5 = 6$.

故数列 $\{a_n + 2n + 3\}$ 是以 6 为首项, 以 2 为公比的等比数列 5 分

(2) 由 (1) 可知: $a_n + 2n + 3 = 3 \times 2^n$, 故 $a_n = 3 \times 2^n - 2n - 3$ 6 分

$$\begin{aligned} & a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} \\ &= (3 \times 2 - 5) + (3 \times 2^3 - 9) + (3 \times 2^5 - 13) + \cdots + [3 \times 2^{2n-1} - (4n+1)] \\ &= (3 \times 2 + 3 \times 2^3 + 3 \times 2^5 + \cdots + 3 \times 2^{2n-1}) - [5 + 9 + 13 + \cdots + (4n+1)] \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \\ &= \frac{6(1-4^n)}{1-4} - \frac{n}{2}[5 + (4n+1)] = 2^{2n+1} - 2n^2 - 3n - 2 \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

18. 【解析】 (1) 在 $\triangle ABD$ 中, 正弦定理得: $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \alpha}$ 2 分

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得: $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{\sin 2\alpha}$

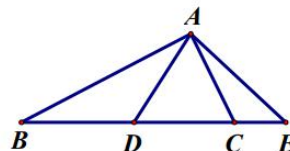
由已知, $BD = CD$ 且 $\sin \angle ADB = \sin \angle ADC$,

故 $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$ 4 分

由 $AB = \sqrt{3}AC$, $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, 所以 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $\alpha \in (0, \pi)$, 故 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle BAC = 3\alpha = \frac{\pi}{2}$.

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 6 分



(2) 由已知 $AD = 1$, 所以 $CD = BD = AD = AC = 1$, $\angle ACE = \frac{2\pi}{3}$

设 $CE = x$, 则 $AE = 2x$,

在 $\triangle ACE$ 中, 由余弦定理得 $AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cos \frac{2\pi}{3}$ 9 分

整理得 $12x^2 - x - 1 = 0$ ，解得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = -\frac{1}{4}$ （舍去）。

$$\text{故 } CE = \frac{1}{3}, BE = \frac{7}{3}, S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE \sin \frac{\pi}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{12}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 【解析】 $f'(x) = 6x^2 - 6(a^2 - a + 2)x + 12(a^2 - a) = 6(x - 2)(x - a^2 + a)$ 2 分

由 $f'(x) = 0$ ，得 $x = a^2 - a$ 或 $x = 2$ ，由 $a^2 - a = 2$ ，得 $a = -1$ 或 $a = 2$

当 $a = 2$ 或 $a = -1$ 时， $f'(x) = 6(x - 2)^2 \geq 0$ ； 4 分

当 $a < -1$ 或 $a > 2$ 时， $a^2 - a > 2$ ， $x \in (-\infty, 2) \cup (a^2 - a, +\infty)$ ， $f'(x) > 0$ ； $x \in (2, a^2 - a)$ ， $f'(x) < 0$ 。

当 $-1 < a < 2$ 时， $a^2 - a < 2$ ， $x \in (-\infty, a^2 - a) \cup (2, +\infty)$ ， $f'(x) > 0$ ； $x \in (a^2 - a, 2)$ ， $f'(x) < 0$ 。

..... 8 分

故当 $a = 2$ 或 $a = -1$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增；

当 $a < -1$ 或 $a > 2$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, 2), (a^2 - a, +\infty)$ 上单调递增，在 $(2, a^2 - a)$ 上单调递减；

当 $-1 < a < 2$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, a^2 - a), (2, +\infty)$ 上单调递增，在 $(a^2 - a, 2)$ 上单调递减。 12 分

20. 【解析】方案 1：由已知得： $OB = \cos \alpha, BC = \sin \alpha$ ， $OA = \frac{AD}{\tan 60^\circ} = \frac{BC}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha$

$$\text{所以 } AB = OB - OA = \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

设矩形 $ABCD$ 的面积为 S ，则

$$\begin{aligned} S &= AB \cdot BC = \left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \right) \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{6} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{6} \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ，得 $\frac{\pi}{6} < 2\alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$ ，所以当 $2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时，

$$\text{矩形 } ABCD \text{ 的最大面积为 } S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

方案 2：由题意可知： $AB = 2AE = 2 \sin \beta$ ， $OE = \cos \beta$ ，

$$\text{又 } OF = \frac{DF}{\tan 30^\circ} = \frac{AE}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \sin \beta，$$

$$AD = EF = OE - OF = \cos \beta - \sqrt{3} \sin \beta \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

设矩形 $ABCD$ 的面积为 S ，则

$$\begin{aligned} S &= AB \cdot AD = 2 \sin \beta (\cos \beta - \sqrt{3} \sin \beta) = \sin 2\beta + \sqrt{3} \cos 2\alpha - \sqrt{3} \\ &= 2 \sin \left(2\beta + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

又 $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$ ，得 $\frac{\pi}{3} < 2\beta + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$ ，所以当 $2\beta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\beta = \frac{\pi}{12}$ 时，

矩形 $ABCD$ 面积取最大为 $S_2 = 2 - \sqrt{3}$ 。 $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

由于 $\left(\frac{7\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{49}{12} > 4$ ，故 $\frac{7\sqrt{3}}{6} > 2$ ，即 $\frac{\sqrt{3}}{6} > 2 - \sqrt{3}$ ，故 $S_1 > S_2$

故应选择方案 1，当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时，矩形 $ABCD$ 的面积最大为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 【解析】(1) 由已知 $F(x) = \ln(x+1) - \frac{ax}{x+1}$ ，定义域为 $(-1, +\infty)$ 。

$$F'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{a}{(x+1)^2} = \frac{x+1-a}{(x+1)^2} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由 $F'(x) = 0$ ，得 $x = a - 1$ 。

当 $a \leq 0$ 时， $x \in (-1, +\infty)$ ， $F'(x) > 0$ ， $F(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增无最小值。

当 $a > 0$ 时， $x \in (-1, a-1)$ ， $F'(x) < 0$ ； $x \in (a-1, +\infty)$ ， $F'(x) > 0$ 。

$$\text{故 } F(x)_{\min} = F(a-1) = \ln a - a + 1 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \ln x - x + 1 (x > 0), \quad \varphi'(x) = \frac{1-x}{x} (x > 0).$$

$$x \in (0, 1), \varphi'(x) > 0; x \in (1, +\infty), \varphi'(x) < 0, \quad \varphi(x)_{\max} = \varphi(1) = 0$$

所以由 $\ln a - a + 1 = 0$ ，得 $a = 1$ 。 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 可知 $a = 1$ ，此时 $g(1) + g(2) + \dots + g(n) + f(n) > n$ 等价于：

$$\ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由 (1) 可知当 $x > 0$ 时， $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$ 。

$$\text{故 } \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) > \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{n+1}, \text{ 即 } \ln(n+1) - \ln n > \frac{1}{n+1}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \ln(n+1) = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + [\ln(n+1) - \ln n] > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$$

$$\text{故 } g(1) + g(2) + \dots + g(n) + f(n) > n \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 【解析】(1) 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 因为 $f'(x) = \frac{1}{x+n}$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{所以 } \frac{1}{x_0+n} = 1, \text{ 又 } y_0 = \ln(x_0+n), \text{ 所以 } y_0 = 0,$$

$$\text{故 } x_0 = y_0 = 0, \text{ 所以 } n = 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 存在 $x_0 \geq 0$, 使 $f(x_0) > e^{2x_0} - x_0^2$ 成立,

$$\text{等价于: 存在 } x_0 \geq 0, \text{ 使 } e^{2x_0} - \ln(x_0+n) - x_0^2 < 0 \text{ 成立.}$$

$$\text{令 } g(x) = e^{2x} - \ln(x+n) - x^2 (x \geq 0), \quad g'(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{x+n} - 2x$$

$$\text{令 } h(x) = g'(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{x+n} - 2x, \quad h'(x) = 4e^{2x} + \frac{1}{(x+n)^2} - 2$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } h'(x) > 0, \text{ 故 } h(x) = g'(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{所以 } g'(x) \geq g'(0) = 2 - \frac{1}{n} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{①当 } n \geq \frac{1}{2} \text{ 时, } g'(x) \geq 2 - \frac{1}{n} \geq 0, \text{ 故 } g(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{所以 } g(x) \geq g(0) = 1 - \ln n, \text{ 由已知 } 1 - \ln n < 0, \text{ 即 } n > e. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{②当 } n < \frac{1}{2} \text{ 时, } g'(0) = 2 - \frac{1}{n} < 0$$

$$\text{故存在 } x_1 \in (0, +\infty), \text{ 使得 } g'(x_1) = 0. \text{ 此时 } \frac{1}{x_1+n} = 2e^{2x_1} - 2x_1.$$

$$\text{若 } x \in (0, x_1) \text{ 时, } g'(x) < 0; \text{ 若 } x \in (x_1, +\infty) \text{ 时, } g'(x) > 0.$$

$$\text{所以 } g(x)_{\min} = g(x_1) = e^{2x_1} - \ln(x_1+n) - x_1^2 = (e^{2x_1} - x_1^2) + \ln(2e^{2x_1} - 2x_1) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \varphi_1(x) = e^{2x} - x^2 (x > 0), \quad \varphi_1'(x) = 2e^{2x} - 2x, \quad \varphi_1''(x) = 4e^{2x} - 2 > 0,$$

$$\text{所以 } \varphi_1'(x) = 2e^{2x} - 2x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单调递增, 所以 } \varphi_1'(x) > \varphi_1'(0) = 2 > 0;$$

所以 $\varphi_1(x) > \varphi_1(0) = 1 > 0$ ，故 $e^{2x_1} - x_1^2 > 0$ 。

令 $\varphi_2(x) = e^{2x} - x (x > 0)$ ， $\varphi_2'(x) = 2e^{2x} - 1 > 0$ ，故 $\varphi_2(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增

所以 $\varphi_2(x) > \varphi_2(0) = 1$ ，故 $\ln(2e^{2x_1} - 2x_1) > \ln 2 > 0$

故不存在 $x_0 \geq 0$ ，使 $e^{2x_0} - \ln(x_0 + n) - x_0^2 < 0$ 成立。

综合上述：实数 n 的取值范围是 $(e, +\infty)$ 。 12 分